Inspectoratul Şcolar Judeţean Buzău

Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 9-a, Soluţii şi bareme

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale astfel încât $a_1 = 1$.
a) Să se arate că există $k > 1$ astfel ca a_k să fie pătrat perfect.
b) Să se arate că progresia conţine o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.
c) Să se dea un exemplu de progresie aritmetică de numere naturale care nu conţine nici un pătrat perfect.

Soluţie. a) Fie r raţia progresiei. Avem atunci $a_n = 1 + (n-1)\,r$ .... (1 p)
Observăm că $a_{r+3} = 1 + (r+2)\,r = (r+1)^2$ .... (2 p)
b) De asemenea, $(kr+1)^2 = 1 + 2kr + k^2r^2 = 1 + \left(2k + k^2 r\right) r = a_{2k+k^2r+1}$ .... (3 p)
c) Un exemplu: $a_n = 10n + 2$ .... (1 p)

2. Să se determine numerele reale x, y, dacă

$$\begin{cases} x + [y] = 13,9 \\ [x] + 2y = 24,3 \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul se mai scrie

$$\begin{cases} [x] + [y] + \{x\} = 13,9 \\ [x] + 2\,[y] + 2\,\{y\} = 24,3 \end{cases}$$

.... (1 p)
Din prima ecuaţie deducem $[x] + [y] = 13$ şi $\{x\} = 0,9$ .... (1 p)
Din a doua rezultă fie $[x] + 2\,[y] = 24$ şi $\{y\} = 0,15$, fie $[x] + 2\,[y] = 23$ şi $\{y\} = 0,65$ .... (3 p)
Finalizare $(x, y) = (2,9; 11,15)$ sau $(x, y) = (3,9; 10,65)$ .... (2 p)

3. Fie ABC un triunghi şi M un punct în plan astfel încât

$$5\overline{AM} = 2\overline{AB} + 3\overline{AC}.$$

Să se arate că M aparţine segmentului (BC).

Soluţie. Avem $\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = \frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{3}{5}\overline{AC} - \overline{AB} = \frac{3}{5}\overline{BC}$ .... (3 p)
Deducem că B, M, C sunt coliniare .... (2 p)
Analog, $\overline{MC} = \frac{2}{5}\overline{BC}$, deci vectorii $\overline{MC}, \overline{BM}$ au acelaşi sens, de unde rezultă $M \in (BC)$ .... (2 p)